数理解析研究所講究録
855巻 1993年 31-47

巾零Lie群に付随するGelfand対

京大 理　菊地 克彦 (Katsuhiko KIKUCHI)

§0 序

Nを連結かつ単連結な巾零Lie群，KをNに自己同型として作用するcompact群とする．すると，Kは群代数$L^1(N)$にも自己同型として作用する．$L^1(N)$のK不変元全体のなす部分代数を$L^1_K(N)$で表す．このとき，対$(K;N)$がNに付随するGelfand対（以下単にGelfand対）であるということを，$L^1_K(N)$が可換であることとする．Benson－Jenkins－Ratcliffによると，$(K;N)$がGelfand対ならば，Nは高々2-stepである．（[BJR]）．今回は，一般の2-step巾零Lie群について，$(K;N)$がGelfand対であることの判定を，Heisenberg群の場合に帰着させる方法を論じる．これは本質的にはCarcanoの判定条件に依存するが，その際に使われるNの既約unitary表現の代わりに，その表現に自然に付随するHeisenberg群を用いて判定するという方法である．

その応用例として，NのLie代数$\mathfrak{n}$の中心$\mathfrak{z}(\mathfrak{n})$と導来ideal$[\mathfrak{n},\mathfrak{n}]$が異なる場合の様相を論じる．その際，compact群Kの$\mathfrak{z}(\mathfrak{n})$への作用がGelfand対の判定に強く関わることを反例を用いて示す．

さらに，Kがn次torus $\mathbb{T}^n$の場合の，$(K;N)$がGelfand対となる条件を決定する．これは，Leptinが[L]において行った$[\mathfrak{n},\mathfrak{n}]=\mathfrak{z}(\mathfrak{n})$の場合の結果の拡張をなすものである．

なお，以下において，巾零Lie群は常に連結かつ単連結を仮定する．

§1 準備

$\hat{N}$をNの既約unitary表現の同値類のなす空間とし，Fell位相が入っているとする．$\pi\in\hat{N}$とするとき，$k\in K$についてNの表現π_kを$\pi_k(x)=\pi(k\cdot x)$で定義する．すると，π_kもNの既約unitary表現になる．Kにおけるπの安定化部分群をK_πとする：$K_\pi=\{k\in K \mid \pi_k\simeq\pi\}$．$\pi$の表現空間を$\mathcal{H}_\pi$とするとき，$k\in K_\pi$に対して，ある$\mathcal{H}_\pi$上のunitary作用素$W_\pi(k)$が存在して，$\pi_k(x)=W_\pi(k)\,\pi(x)\,W_\pi(k)^{-1}$ $(x\in N)$．W_πはK_πの$\mathcal{H}_\pi$上の射影表現になる．compact群のunitary表現の理論と同様にして；W_πはK_πの既約射影表現の直和に分解される：

$$W_\pi=\sum c(T,W_\pi)T.$$

ここで，$c(T, W_\lambda)$はW_λにおけるTの重複度である．

定理 1.1. [C]　以下の3つの条件は同値である：

(1)　$(K;N)$はGelfand対．

(2)　任意の$\pi \in \hat{N}$について　$c(T, W_\pi) \leq 1$．

(3)　ある稠密な部分集合$S \subset \hat{N}$が存在し，任意の$\pi \in S$について　$c(T, W_\pi) \leq 1$．

$\hat{N}$の部分集合Sに対し，$S \cdot K = \{\pi_k \mid \pi \in S, k \in K\}$とおく．

系 1.2.　定理1.1.の各条件は，次の条件とも同値である：

(4)　$S \cdot K$が稠密になるような$S \subset \hat{N}$が存在し，任意の$\pi \in S$について　$c(T, W_\pi) \leq 1$．

Kirillovの理論によると，余随伴軌道の空間$\mathfrak{n}^*/N$と$\hat{N}$には1対1対応がある([Ki])．さらに，$\mathfrak{n}^*/N$に$\mathfrak{n}^*$からの商位相を入れると，この対応は同相になる([Br])．lに対応するNの既約unitary表現をπ_lと表す．いま，Kの$\mathfrak{n}^*$への右作用を$(l \cdot k)(X) = l(k \cdot X)$　$(l \in \mathfrak{n}^*, k \in K, X \in \mathfrak{n})$で与える．すると，$(\pi_l)_k \simeq \pi_{l \cdot k}$．さらに，$((Ad^*(x)l) \cdot k)(X) = (Ad^*(k^{-1} \cdot x)(l \cdot k))(X)$　$(x \in N, l \in \mathfrak{n}^*, k \in K, X \in \mathfrak{n})$．

よって，$(\mathrm{Ad}^*(N)\ell)\cdot K = \mathrm{Ad}^*(N)(\ell\cdot K)$　$(\ell\in\mathfrak{n}^*)$．このことにより，系1.2.におけるSとして，$\bigcup_{\alpha\in A}(\mathrm{Ad}^*(N)\ell_\alpha\cdot K)$が$\mathfrak{n}^*$において稠密になるような$\{\ell_\alpha\}_{\alpha\in A}$について，$\{\pi_{\ell_\alpha}\}_{\alpha\in A}$をとればよい．

§2　Heisenberg群への帰着

まず，$(2n+1)$次Heisenberg群H_nの場合について考える．$\mathfrak{h}_n$をH_nのLie代数，Kを自己同型群$\mathrm{Aut}(\mathfrak{h}_n)$のcompact部分群とする．$\mathfrak{h}_n$の中心$\mathfrak{z}(\mathfrak{h}_n)$は$K$不変であり，$K$はcompactだから，$\{1\}$または$\{\pm1\}$を像にもつ$K$のcharacter χが存在し，

$$k\cdot X = \chi(k)X \qquad (X\in\mathfrak{z}(\mathfrak{h}_n),\ k\in K).$$

いま，Kが$\mathfrak{z}(\mathfrak{h}_n)$に自明に作用しているとしよう．$\mathfrak{h}_n$における$\mathfrak{z}(\mathfrak{h}_n)$の$K$不変な補空間を$V$とする．このとき，$V$に適当な複素構造$I$及び複素内積$\omega$をとることにより，$K$は$\omega$に関するunitary群の部分群とみなせる．

H_nの既約unitary表現で，中心において自明でないものはその central characterで決定される．$\mathfrak{z}(\mathfrak{h}_n)$の生成元を$T$とし，central character χ_λを$\chi_\lambda(\exp tT)=e^{\sqrt{-1}\lambda t}$　$(t\in\mathbb{R})$とおくとき，対応するH_nの既約unitary表現をR_λと表す．$\{R_\lambda\}_{\lambda\neq0}$は$\widehat{H_n}$において稠密である．定理1.1より，$\{R_\lambda\}_{\lambda\neq0}$のみ考察すればよい．$R_\lambda$をFock modelで実現する．

$\lambda>0$に対し，$\mathcal{H}_\lambda$ ($\mathcal{H}_{-\lambda}$)をV上全体で正則（反正則）な函数fであって，$\int_V |f(w)|^2 e^{-\frac{\lambda}{2}|w|^2} dw < +\infty$となるもの全体のなすHilbert空間とする．ただし，dwはVを$\mathbb{R}$上vector空間とみたときのLebesgue測度．表現R_λは次の形で与えられる：

$$
\begin{aligned}
&(2.1) \quad (R_\lambda(z,t)f)(w) = e^{\sqrt{-1}\lambda t - \frac{\lambda}{2} w\bar{z} - \frac{\lambda}{4}|z|^2} f(w+z), \\
&(2.2) \quad (R_{-\lambda}(z,t)f)(w) = e^{-\sqrt{-1}\lambda t - \frac{\lambda}{2} \bar{w} z - \frac{\lambda}{4}|z|^2} f(w+z),
\end{aligned}
\qquad (\lambda>0)
$$

$\lambda>0$のとき，$\mathcal{H}_\lambda$は正則多項式環$\mathbb{C}[V]$を，$\mathcal{H}_\lambda$は反正則多項式環$\overline{\mathbb{C}[V]}$をそれぞれ稠密に含む．

$k\in K$は，central characterを不変にすることにより，KにおけるR_λの安定化部分群はK自身になる．$k\in K$に対し，$\mathcal{H}_\lambda$上のunitary作用素$W_\lambda(k)$を次で定義する：

$$(W_\lambda(k)f)(w) = f(k^{-1}\cdot w), \qquad (f\in\mathcal{H}_\lambda,\ w\in V).$$

簡単な計算により，$R_\lambda(k\cdot(z,t))W_\lambda(k) = W_\lambda(k)R_\lambda(z,t)$となることが分かる．明らかに$W_\lambda(k_1k_2) = W_\lambda(k_1)W_\lambda(k_2)$．さらに，$\mathbb{C}[V]$は$W_\lambda$について不変であり，$W_\lambda$の$\mathbb{C}[V]$上の作用は$\lambda>0$のとり方に依らない．$\lambda<0$のときも，正則函数を反正則函数に読み換えれば同様の議論がなされる．よって，ただ1つの実数$\lambda_0\neq 0$について考察すればよい．

命題2.1. [BJR]　$(K;H_n)$がGelfand対であるのは，ある$\lambda_0 \neq 0$についてW_{λ_0}が高々重複度1に既約分解されるときである.

話を一般の2-step巾零Lie群Nに戻そう．Nの既約unitary表現の構造を考える．$l \in \mathfrak{n}^*$に対し，$\mathfrak{n}$上の交代形式を次で定義する:

$$B_l(X,Y)=l([X,Y]), \qquad (X,Y\in\mathfrak{n}).$$

このB_lを用いて，$\mathfrak{n}$の部分空間$\mathfrak{n}(l)$, $\mathfrak{b}(l)$を次で定義する:

$$\mathfrak{n}(l)=\{X\in\mathfrak{n} \mid B_l(X,Y)=0 \quad {}^{\forall}Y\in\mathfrak{n}\}$$
(2.3)
$$\mathfrak{b}(l)=\mathfrak{n}(l)\cap \ker l$$

命題2.2.　$l \in \mathfrak{n}^*$を0でない元とする．このとき，

(1) $\mathfrak{n}(l)$は$\mathfrak{n}$のidealである.

(2) $\mathfrak{b}(l)$は$\mathfrak{n}$のidealである.

(3) $\dim\left(\mathfrak{n}(l)/\mathfrak{b}(l)\right)=1$.

(4) $l|_{[\mathfrak{n},\mathfrak{n}]}\neq 0 \Leftrightarrow \mathfrak{n}(l)\neq\mathfrak{n}$. このとき$\dim(\mathfrak{n}/\mathfrak{b}(l))>1$.

さらに，

$$\mathfrak{z}(\mathfrak{n}/\mathfrak{b}(l)) = \mathfrak{n}(l)/\mathfrak{b}(l),$$
$$(\mathfrak{n}/\mathfrak{b}(l))/(\mathfrak{n}(l)/\mathfrak{b}(l)) \cong \mathfrak{n}/\mathfrak{n}(l).$$

$\mathfrak{n}/\mathfrak{n}(l)$ は可換だから，$\mathfrak{n}/\mathfrak{b}(l)$ は $(2n+1)$ 次 Heisenberg 代数 $\mathfrak{h}_n$ に同型になる．ただし $n=\frac{1}{2}\dim(\mathfrak{n}/\mathfrak{n}(l))$．$B(l)=\exp\mathfrak{b}(l)$ とおく．すると，$B(l)\backslash N$ は $(2n+1)$ 次 Heisenberg 群に同型になる．l に対応する N の既約 unitary 表現を π_l とすると，$\pi_l \cong \sigma_{l_0}\circ p_l$ と表される．ただし，p_l は N から $B(l)\backslash N$ への自然な射影であり，$l_0\in(\mathfrak{n}/\mathfrak{b}(l))^*$ は $l=l_0\circ p_l$ なる元，σ_{l_0} は l_0 に対応する $B(l)\backslash N$ の既約 unitary 表現である．

<u>補題 2.3.</u>　$l, l'\in\mathfrak{n}^*$ とする．このとき

$$\pi_l\simeq\pi_{l'} \iff \begin{cases}(1) & \mathfrak{n}(l)=\mathfrak{n}(l'),\\ (2) & l|_{\mathfrak{n}(l)}=l'|_{\mathfrak{n}(l)}.\end{cases}$$

証明は，例えば [M, p1164, Theorem 2.3 (3)]

この補題から，容易に次が得られる．

<u>補題 2.4</u>　$k\in K$，$\pi=\pi_l$ とする．このとき，

$$k\in K_\pi \iff \begin{cases}(1) & \mathfrak{n}(l)=k^{-1}\cdot\mathfrak{n}(l),\\ (2) & l|_{\mathfrak{n}(l)}=l\cdot k|_{\mathfrak{n}(l)}.\end{cases}$$

ここで，次で与えられる $\mathrm{Aut}(N)$ の部分群を考える：

$$\mathrm{Aut}(N)_\pi=\{\varphi\in\mathrm{Aut}(N)\mid(\pi)_\varphi\simeq\pi\}.$$

ただし，$(\pi)_\varphi(x)=\pi(\varphi(x))\quad(x\in N)$．すると$K_\pi$は$\mathrm{Aut}(N)_\pi$の部分群とみなせる．$p_l:N\to B(l)\backslash N$を自然な射影とし，写像$\Phi_\pi$を次で定義する：

(2.4) $\quad\Phi_\pi:\mathrm{Aut}(N)_\pi\ni\varphi\longmapsto\bar{\varphi}\in\mathrm{Aut}(B(l)\backslash N)$.

ただし．$\bar{\varphi}(p_l(x))=p_l(\varphi(x))\quad(x\in N)$．すると，補題2.3.より$\Phi_\pi$はwell-definedであり，$\Phi_\pi(K_\pi)$は$B(l)\backslash N$の中心を不変にする．

<u>定理2.5.</u>　$(K;N)$がGelfand対であるということは，すべての$l\in\mathfrak{n}^*$について，$\pi=\pi_l$を対応するNの既約unitary表現とするとき，$(\Phi_\pi(K_\pi);B(l)\backslash N)$がGelfand対になるということである．

<u>証明</u>　定理1.1.により，$l|_{[\mathfrak{n},\mathfrak{n}]}\neq 0$のときのみ考えればよい．$l\in\mathfrak{n}^*$に対し，ある$l_0\in(\mathfrak{n}/\mathfrak{b}(l))^*$が存在して$\pi_l\simeq\sigma_{l_0}\circ p_l$となる．すると

$$\pi_l(k\cdot x)=\sigma_{l_0}(\Phi_\pi(k)p_l(x)),\quad(k\in K_\pi,\ x\in N)$$

σ_{l_0}はあるR_{λ_0}に同値とみなせるから，$\Phi_\pi(K_\pi)$のintertwining表現Wが存在して，

$$\sigma_{l_0}(\Phi_\pi(k)p_l(x))=W(\Phi_\pi(k))\sigma_{l_0}(p_l(x))W(\Phi_\pi(k))^{-1}.$$

よって，$W_\pi=W\circ\Phi_\pi$とすると，W_πはπ_lと$(\pi_l)_k$をintertwine

する：

$$\pi_\ell(k\cdot x) = W_\pi(k)\,\pi_\ell(x)\,W_\pi(k)^{-1}.$$

よって，

$$c(T, W_\pi) \leq 1 \quad {}^\forall T \in \hat{K}_\pi \iff c(T', W) \leq 1 \quad {}^\forall T' \in \Phi_\pi(K_\pi)^\wedge.$$

このことと，定理1.1.及び命題2.1.を組み合わせることにより主張を得る．（証明終）

§3 反例

ここで 定理2.5.の応用例を与える．Nを2-step巾零Lie群，$\mathfrak{n}$をそのLie代数とする．$\mathfrak{z}(\mathfrak{n})$で$\mathfrak{n}$の中心，$[\mathfrak{n},\mathfrak{n}]$で$\mathfrak{n}$の導来idealを表す．$\mathfrak{n}$が2-stepなので，$[\mathfrak{n},\mathfrak{n}] \subset \mathfrak{z}(\mathfrak{n})$．今，$[\mathfrak{n},\mathfrak{n}] \neq \mathfrak{z}(\mathfrak{n})$なる場合を考える．Kを$\mathfrak{n}$に自己同型として作用するcompact群とする．すると$\mathfrak{n}$上にK不変な実内積$\langle\ ,\ \rangle$が存在する．この内積について$\mathfrak{n}$と$\mathfrak{z}(\mathfrak{n})$を分解する：

(3.1) $$\mathfrak{n} = \mathfrak{n}' \oplus \mathfrak{a} \oplus [\mathfrak{n},\mathfrak{n}],$$

(3.2) $$\mathfrak{z}(\mathfrak{n}) = \mathfrak{a} \oplus [\mathfrak{n},\mathfrak{n}].$$

$\mathfrak{n}_1 = \mathfrak{n}' \oplus [\mathfrak{n},\mathfrak{n}]$とおく．すると，$\mathfrak{n}_1$は$\mathfrak{n}$の部分代数になり，$\mathfrak{z}(\mathfrak{n}_1) = [\mathfrak{n}_1,\mathfrak{n}_1] = [\mathfrak{n},\mathfrak{n}]$．さらに，$\mathfrak{a}$，$\mathfrak{n}_1$は$\mathfrak{n}$のidealであり，

(3.3) $$\mathfrak{n} = \mathfrak{n}_1 \oplus \mathfrak{a}.$$

N_1，Aをそれぞれ$\mathfrak{n}_1$，$\mathfrak{a}$に対応するNの部分群とする．

命題3.1. $(K;N)$がGelfand対ならば，$(K;N_1)$もGelfand対である．

この命題の逆を考える．[L]や[BJR]においては，$L_K^1(N)$と$L_K^1(N_1)$の可換性は同値と記述されている．しかし，$L_K^1(N_1)$の可換性から$L_K^1(N)$の可換性は得られない．このことについての反例を以下で述べる．

Nを$\mathbb{C}\times\mathbb{C}\times\mathbb{R}$に同相な巾零Lie群，$\mathfrak{n}$をそのLie代数とし，その括弧積は次で与えられるものとする：

$$[(z_1, z_2, t), (z_1', z_2', t')] = (0, 0, -\mathrm{Im}\, z_2\overline{z_2'}).$$

$K=\mathbb{T}$とし，Kは$\mathfrak{n}$に次のように作用する：

$$e^{\sqrt{-1}\theta}(z_1, z_2, t) = (e^{\sqrt{-1}\theta}z_1, e^{\sqrt{-1}\theta}z_2, t).$$

この節の初めの記号を用いると以下のようになる：

$$\mathfrak{z}(\mathfrak{n}) = \mathbb{C}\times 0\times\mathbb{R}, \quad [\mathfrak{n},\mathfrak{n}] = 0\times 0\times\mathbb{R},$$

$$\mathfrak{n}_1 = 0\times\mathbb{C}\times\mathbb{R}, \quad \mathfrak{a} = \mathbb{C}\times 0\times 0.$$

容易に分かるように，$\mathfrak{n}$は3次Heisenberg代数と同型になる．N_1を$\mathfrak{n}_1$に対応するNの部分群とする．

定理3.2. $(K;N_1)$はGelfand対である．しかし$(K;N)$はGelfand対ではない．

証明　N_1は3次Heisenberg群に同型で，$K=\mathbb{T}$だから$(K;N_1)$はGelfand対になる（[BJR]）．$(K;N)$がGelfand対でないことを示そう．$\mathfrak{n}$の基底として以下のものをとる：

$$E_1^R=(1,0,0),\quad E_1^I=(\sqrt{-1},0,0),$$
$$E_2^R=(0,1,0),\quad E_2^I=(0,\sqrt{-1},0),$$
$$T=(0,0,1).$$

$l\in\mathfrak{n}^*$を$l(z_1,z_2,t)=\mathrm{Re}\,z_1+t$とする．すると，$\mathfrak{n}(l)=\mathfrak{z}(\mathfrak{n})$，$\mathfrak{b}(l)=\mathbb{R}E_1^I+\mathbb{R}(T-E_1^R)$となり，$\mathfrak{n}/\mathfrak{b}(l)$は3次Heisenberg代数に同型になる．$e^{\sqrt{-1}\theta}\in K$について，

$$l(e^{\sqrt{-1}\theta}\cdot(z_1,0,t))=x_1\cos\theta-y_1\sin\theta+t.$$

ただし，$z_1=x_1+\sqrt{-1}y_1$ $(x_1,y_1\in\mathbb{R})$．πをlに対応する既約unitary表現とすると，$K_\pi=\{1\}$．よって，$\Phi_\pi(K_\pi)=\{1\}$．然るに，$(\Phi_\pi(K_\pi);B(l)\backslash N)$はGelfand対ではない．定理2.5.より，$(K;N)$はGelfand対ではない．　（証明終）

(3.3)より，$N=N_1\times A$である．故に$L^1(N)=L^1(N_1)\otimes L^1(A)$となる．しかし，定理3.2.より，$L^1_K(N)$は，$L^1(A)$のいかなる部分代数$B$に対して，$L^1_K(N_1)\otimes B$とは表されない．

§4 Leptin's Problem

Nを2-step巾零Lie群とし，$K=\mathbb{T}^n$がNに自己同型として

作用しているとする．Leptinが[L]において提示した次の問題を考えてみよう．

<u>問題4.1.</u>　$(K;N)$がGelfand対となるのはどのようなときか？

例えば，$(\mathbb{T}^n, H_n)$はGelfand対である([HR])．$[\mathfrak{n},\mathfrak{n}]=\mathfrak{z}(\mathfrak{n})$，かつ$\mathbb{T}^n$が効果的に作用しているとき，Leptinは[L]において以下のような解答を与えた：

$(\mathbb{T}^n;N)$がGelfand対になるのは，Nが$(H_1)^n$の中心部分群による商群で，$\mathbb{T}^n$が$(H_1)^n$に自然に作用しているときである．このとき，$\mathbb{T}^n$は$\mathfrak{Z}(N)$に自明に作用する．

そこで，$[\mathfrak{n},\mathfrak{n}]\neq\mathfrak{z}(\mathfrak{n})$の場合について考察し，問題4.1.の完全な解答を与える．(3.1)，(3.2)，(3.3)の分解を再び用いる．$\hat{K}^r$を既約実K加群の同値類全体のなす族とする．すると，$\hat{K}^r$は$\mathbb{Z}^n/\sim$と同一視される．ただし$\alpha\sim\beta\Leftrightarrow\beta=\pm\alpha$ $(\alpha,\beta\in\mathbb{Z}^n)$．代表系を固定することにより$\hat{K}^r$を$\mathbb{Z}^n$の部分集合とみなす．$\mathfrak{n}$，$\mathfrak{a}$をさらにisotypicな実加群の直和に分解する：

$$(4.1)\qquad \mathfrak{n}=\sum_\alpha V_\alpha,\quad \mathfrak{a}=\sum_\alpha V'_\alpha.$$

0でない$\alpha \in \mathbb{Z}^r$に対し，V_αを次の性質をもつ2次実K加群$\mathbb{R}X_\alpha + \mathbb{R}Y_\alpha$とする：

$$(4.2)\quad (\exp U \cdot X_\alpha,\ \exp U \cdot Y_\alpha) = (X_\alpha, Y_\alpha)\begin{pmatrix} \cos\alpha(U) & -\sin\alpha(U) \\ \sin\alpha(U) & \cos\alpha(U) \end{pmatrix}.$$

ただし$U \in \mathfrak{k}$，$\mathfrak{k}$はKのLie代数とする．$\alpha = 0$のときはV_αは1次自明実K加群とする．V'_α，V''_αはそれぞれV_αの重複度$m_{\alpha,1}$，$m_{\alpha,2}$の直和と考えられる．

$$(4.3)\quad V'_\alpha = m_{\alpha,1} V_\alpha = \sum_{i=1}^{m_{\alpha,1}} V'_{\alpha,i}\ ,\quad V''_\alpha = m_{\alpha,2} V_\alpha = \sum_{i=1}^{m_{\alpha,2}} V''_{\alpha,i}.$$

$\mathfrak{k}^r$の部分集合S_1，S_2をそれぞれ以下のものとする：

$$(4.4)\quad S_1 = \{\alpha \in \mathfrak{k}^r \mid m_{\alpha,1} \neq 0\},\ S_2 = \{\alpha \in \mathfrak{k}^r \mid m_{\alpha,2} \neq 0\}$$

<u>定理4.2.</u>　$(K;N)$がGelfand対であるのは，以下の5つの条件を満たすときである：

(1) $m_{0,1} = 0$.

(2) S_1は1次独立な集合.

(3) $m_{\alpha,1} = 1$，$^\forall \alpha \in S_1$.

(4) $\mathbb{R}\text{-}Sp(S_1) \cap \mathbb{R}\text{-}Sp(S_2) = 0$.

(5) Kは$[\mathfrak{n}, \mathfrak{n}]$に自明に作用する.

この定理を証明するために，次の補題を用意する．

__補題4.3.__　Kをn次compact可換Lie群（必ずしも連結ではない）とし，KはH_mに自己同型として効果的に作用しているとする．このとき，$(K;H_m)$がGelfand対となるのは$n=m$のときである．

このことは，[BJR]，Theorem 5.17の証明より分かる．

__定理4.2の証明の概略__　第1段：V_1, V_2を互いに直交する$\mathfrak{n}$のK不変部分空間とする．このとき$[V_1, V_2]=0$（[BJR, p107] Leptinの定理の証明を参照）．特に$[V_0', V_\alpha]=0$ $(\alpha\in S_1)$となることが分かり，$[V_0', \mathfrak{n}]=0$．よって$m_{0,1}=0$．これにより(1)が示された．また，任意の0でない$\alpha\in\hat{K}^r$について，

$$[\exp v\cdot X_\alpha, \exp v\cdot Y_\alpha]=[X_\alpha, Y_\alpha], \quad (v\in R).$$

このことと，$[V'_{\alpha,i}, V'_{\alpha,j}]=0$ $(i\neq j)$より，Kは$[\mathfrak{n},\mathfrak{n}]$に自明に作用していることが分かる．よって(5)が示された．

第2段：(2)～(4)を示す．$\ell\in\mathfrak{n}^*$を$\ell([V'_{\alpha,i}, V'_{\alpha,i}])\neq 0$ $(\alpha\in S_1,$ $1\leq i\leq m_{\alpha,1})$，かつ$\ell(X''_{\beta,j})=1$，$\ell(Y''_{\beta,j})=0$，$\ell|_{\mathfrak{n}'}$ 0なるものとする．このとき，$\mathfrak{n}(\ell)=\mathfrak{z}(\mathfrak{n})$であり，$\mathfrak{n}/\mathfrak{r}(\ell)\simeq\mathfrak{h}_m$．ただし，$m=\sum_{\alpha\in S_1} m_{\alpha,1}$．$\pi=\pi_\ell$を$\ell$に対応するNの既約unitary表現とすると，

$$K_\pi=\{k\in K \mid k\cdot X=X \quad {}^\forall X\in\mathfrak{z}(\mathfrak{n})\}.$$

$\mathfrak{k}_\pi$をK_πのLie代数とする．すると，

$$\mathfrak{k}_\pi = \{ U \in \mathfrak{k} \mid U \cdot X = 0 \quad {}^\forall X \in \mathfrak{z}(\mathfrak{n}) \}$$
$$= \bigcap_{\beta \in S_2} \ker \beta .$$

このとき，K_πの元は$\mathrm{Aut}(\mathfrak{n}/\mathfrak{l}(\ell))$に誘導される．この対応を(2.4)と同様に$\Phi_\pi$とすると，その微分$d\Phi_\pi$は，$\mathfrak{k}_\pi$から導分代数$\mathrm{Der}(\mathfrak{n}/\mathfrak{l}(\ell))$への写像になる．このとき，

$$\ker d\Phi_\pi = \{ U \in \mathfrak{k}_\pi \mid \alpha(U) = 0 \quad {}^\forall \alpha \in S_1 \}$$
$$= \Big(\bigcap_{\alpha \in S_1} \ker \alpha \Big) \cap \Big(\bigcap_{\beta \in S_2} \ker \beta \Big).$$

定理4.3.より，

$$m = \dim d\Phi_\pi (\mathfrak{k}_\pi)$$
$$= \dim \Big(\bigcap_{\beta \in S_2} \ker \beta \Big) - \dim \Big(\Big(\bigcap_{\alpha \in S_1} \ker \alpha \Big) \cap \Big(\bigcap_{\beta \in S_2} \ker \beta \Big) \Big)$$
$$\leq n - \dim \Big(\bigcap_{\alpha \in S_1} \ker \alpha \Big)$$
$$\leq \# S_1 \leq \sum_{\alpha \in S_1} m_{\alpha,1} = m .$$

これらの不等号はすべて等号になる．よって(2)〜(4)は示された．

第3段．逆に(1)〜(5)が満たされているとする．このとき$(K; N)$がGelfand対であることを示す．そのためには，定理2.5.におけるℓとして．最大次元の余随伴軌道に属するもののみを考えればよい．まず，(1)〜(3)より，

$$[V_\alpha', V_\beta] = 0, \quad (\alpha, \beta \in S_1, \ \alpha \neq \beta).$$

が得られる．このことにより，ℓを通る余随伴軌道が最大次元となるのは，$\ell([V_\alpha', V_\alpha]) \neq 0 \quad (\alpha \in S_1)$となるときである．

よって，$\ell|_{[V_\alpha', V_\alpha]} \neq 0$，$\ell|_{\mathfrak{n}'} = 0$．そして$\ell|_{V_{\beta,j}''} \neq 0 \ (\beta \in S_2,$

$1 \leq j \leq m_{\beta,2}$)としてよい．このとき，$\mathfrak{n}(\ell)=\mathfrak{Z}(\mathfrak{n})$であり，$\mathfrak{n}/\mathfrak{b}(\ell) \cong \mathfrak{h}_m$，ただし$m=\#S_1$．$\pi=\pi_\ell$を$\ell$に対応する既約unitary表現とすると，(5)より，

$$K_\pi=\{k \in K \mid \ell \cdot k=\ell \ \text{ on } Z(N)\}$$

$$\mathfrak{k}_\pi=\{U \in \mathfrak{k} \mid U \cdot X=0 \quad {}^\forall X \in \mathfrak{a}\}=\bigcap_{\beta \in S_2} \ker\beta$$

第2段と同様に写像$\Phi_\pi: K_\pi \longrightarrow \mathrm{Aut}(\mathfrak{n}/\mathfrak{b}(\ell))$を考えると，その微分$d\Phi_\pi$について，

$$\ker d\Phi_\pi=\Big(\bigcap_{\alpha \in S_1} \ker\alpha\Big) \cap \Big(\bigcap_{\beta \in S_2} \ker\beta\Big).$$

よって，(1)〜(4)より，

$$\begin{aligned}\dim d\Phi_\pi &= \dim\Big(\bigcap_{\beta \in S_2} \ker\beta\Big)-\dim\Big(\Big(\bigcap_{\alpha \in S_1} \ker\alpha\Big) \cap \Big(\bigcap_{\beta \in S_2} \ker\beta\Big)\Big) \\ &= \dim \mathfrak{k}-\dim\Big(\bigcap_{\alpha \in S_1} \ker\alpha\Big) \\ &= \#S_1=m\end{aligned}$$

補題4.3.より，$(\Phi_\pi(K_\pi); B(\ell)\backslash N)$はGelfand対．定理2.5より，$(K; N)$はGelfand対であることが分かる．（証明終）

Reference

[BJR] C. Benson, J. Jenkins, and G. Ratcliff: On Gelfand pairs associated with solvable Lie groups; Trans. Amer. Math. Soc. 321 (1990), 85–116.

[Br] I. D. Brown: Dual topology of a nilpotent Lie group;

Ann. Sci. École Norm. Sup. 6 (1973), 407–411.

[C] G. Carcano: A commutativity condition for algebras of invariant functions; Boll. Un. Mat. Italiano 7 (1987), 1091–1105.

[HR] A. Hulanicki, and F. Ricci: A tauberian theorem and tangential convergence of bounded harmonic functions on balls in $\mathbb{C}^n$; Invent. Math. 62 (1980), 325–331.

[Ki] A. Kirillov; Unitary representations of nilpotent Lie groups; Russ. Math. Survey 17 (1962), 53–104.

[L] H. Leptin: A new kind of eigenfunction expansion on groups; Pacific J. Math. 116 (1985), 45–67.

[M] K. G. Miller; Parametrices for hypoelliptic operators on step two nilpotent Lie groups; Comm. in Partial Differential Equations, 5 (11), (1980) 1153–1184.